

126. Nachweisgrenze schwacher Ramanlinien auf Photoplatten. II. Spektraldichte und Varianz von «Kornnoise» allein

von K. Frei und Hs. H. Günthard

(14. IV. 59)

1. Einleitung. – In einer früheren Arbeit¹⁾ wurden Ausdrücke abgeleitet für ein Ausschlagskriterium (deflection criterion) zum Nachweis scharf bestimmter, linienförmiger schwacher Signale auf Photoplatten, sowie für die Spektraldichte von Signal + Noise, wenn der Untergrund als GAUSS'scher stochastischer Prozess beschrieben wird. Die Bedingung für das Grössenverhältnis von Signal und Untergrund lautete $S \ll e^{-B/\gamma} T_N^{-1/\gamma}$ (spezifische Signalenergie S , T_N Transmission des Untergrundes, $B = 2,303 \beta$, γ Kontrast, $-\beta/\gamma$ Trägheit; Dichte D_N des Untergrundes liege in der Normalregion der Platte).

In dem vorliegenden II. Teil betrachten wir die Varianz des Untergrundes bei Annahme einer speziellen Autokorrelationsfunktion in Abhängigkeit von den Spaltdimensionen, Plattengeschwindigkeit, Zeitkonstante und Registriergeschwindigkeit. In einer weiteren Publikation behandeln wir das Signal-zu-Noise-Verhältnis und die Liniendeformation bei gegebener Linienform in Funktion von Spaltdimensionen, Plattengeschwindigkeit, Zeitkonstante, Registriergeschwindigkeit und «power spectrum» des Kornnoise²⁾.

Wie schon früher erwähnt, sind bisher nur wenige Messungen der stochastischen Eigenschaften der Körnigkeit photographischer Platten publiziert worden³⁾. Wir gehen aus von Messungen der Autokorrelationsfunktion der optischen Dichte, die von H. J. ZWEIG publiziert worden sind⁴⁾; nach Wahl einer analytischen Darstellung derselben wird die Varianz der Transmission approximativ und asymptotisch berechnet. Dabei wird sich u. a. auch als asymptotisches Gesetz eine von SELWYN⁵⁾ postulierte Relation zwischen Varianz und Spaltöffnung ergeben.

2. Varianz des «Kornnoise». – 2.1. *Wahl einer empirisch gestützten Autokorrelationsfunktion.* H. J. ZWEIG⁴⁾ hat aus umfangreichen statistischen Messungen der optischen Dichte D von gleichmässig belichteten Photoplatten (Dichte i. M. bzw. 0,8, 1,5 und 2,0) empirische Korrelationsfunktionen

$$N^{-1} \sum_{k=1}^N D(x_k + x) D(x_k)$$

mit kreisförmigen Photometerspalten für $2N \approx 10000$ bestimmt. Nach ZWEIG's Ansicht sind für grosse x -Wert die Ergebnisse unsicher; ferner stehen die beobachteten Korrelationsdistanzen (erste Nullstelle der Korrelationsfunktion) in engem

¹⁾ K. FREI & Hs. H. GÜNTHARD, Helv. **41**, 1998 (1958), hiernach als I bezeichnet.

²⁾ Wird in J. opt. Soc. Amer. veröffentlicht.

³⁾ Vgl. (I, 2); dazu H. FRIESER & E. ZEITLER, Mitteil. Agfa, Bd. I und II.

⁴⁾ H. J. ZWEIG, J. opt. Soc. Amer. **46**, 805 (1956).

⁵⁾ E. W. H. SELWYN, Phot. J. **75**, 571 (1935); dazu H. J. ZWEIG, vgl. 4).

Zusammenhang mit dem Radius der Photometerspalte. Es scheint, dass man ZWEIG'S Beobachtungen analytisch approximativ beschreiben kann entweder als

$$\alpha) \text{ Dreiecksfunktion } R'(\vec{x}) = R'(0)[1 - \mathbf{x}/\mathbf{x}_0], \quad \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_0 \tag{2-1}$$

$$= 0, \quad \mathbf{x} > \mathbf{x}_0$$

oder als

$$\beta) \quad R'(\vec{x}) = R'(0)[\sin(\pi \mathbf{x}/\mathbf{x}_0)/(\pi \mathbf{x}/\mathbf{x}_0)]; \tag{2-2}$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2]^{\frac{1}{2}},$$

beide Funktionen sind isotrop.

Die Dreiecksfunktion hat eine nicht positiv definite FOURIER-Transformierte⁶⁾. Zur zweiten Korrelationsfunktion gehört eine positiv semidefinite isotrope FOURIER-Transformierte (siehe w. u. 2-4). Obgleich keine Übersicht über die daraus resultierenden Fehler möglich scheint, machen wir für die folgende Diskussion die Annahme, dass die Autokorrelationsfunktion der stochastischen Grösse $T_N(\mathbf{x}) - \langle T_N \rangle$ (Transmissionsschwankung des Untergrundes) approximiert werden kann, vermittels der isotropen Funktion

$$R_N(\vec{x}) = R_0[\sin(\pi \mathbf{x}/\mathbf{x}_0)/(\pi \mathbf{x}/\mathbf{x}_0)] \tag{2-3}$$

mit R_0 und \mathbf{x}_0 als Varianz bzw. Korrelationsdistanz des Prozesses. Dabei ist wieder hervorzuheben, dass $T_N(\mathbf{x}) - \langle T_N \rangle$ mit infinitesimaler Spalte gemessen wird.

Zu (2-3) gehört die spektrale Dichte⁷⁾:

$$\langle G_N(\vec{k}) \rangle = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\mathbf{x}) e^{-i(\vec{k}, \vec{x})} d^2 \mathbf{x} \tag{2-4}$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} [R_0/(\pi/\mathbf{x}_0)] [\sin(\pi \mathbf{x}_0/\mathbf{x})/\mathbf{x}] (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} e^{-i\mathbf{k} \mathbf{x} \cos(\varphi - \psi)} d\varphi d\mathbf{x}$$

$$= (2\pi)^{-1} [R_0/(\pi/\mathbf{x}_0)] \cdot \int_0^{\infty} \sin(\pi \mathbf{x}/\mathbf{x}_0) J_0(k \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= [R_0 \mathbf{x}_0 / 2 \pi] [K_0^2 - k^2]^{-\frac{1}{2}} \text{ für } k < K_0 = 2\pi/2 \mathbf{x}_0$$

$$= 0 \quad \text{für } k > K_0$$

mit $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2]^{\frac{1}{2}}$ und $k = [k_1^2 + k_2^2]^{\frac{1}{2}}$.

Misst man die Spektraldichte statt mit infinitesimaler mit einer rechteckigen Photometerspalte (Breite 2 s und Höhe 2 l), so erhält man mit der Spaltfunktion $U(y_1, y_2)$

$$U(y_1, y_2) = 1 \quad \text{für } -\varrho s \leq y_1 \leq +\varrho s \text{ und } -1 \leq y_2 \leq +1 \tag{2-5}$$

$$= 0 \quad \text{sonst}$$

⁶⁾ Die dazugehörige Spektraldichte ist nämlich

$$\langle G'(\vec{k}) \rangle = (2\pi)^{-2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} R'(\mathbf{x}) e^{-i(\vec{k}, \vec{x})} d^2 \mathbf{x}$$

$$= R'(0) (2k)^{-2} [J_1(k \mathbf{x}_0) H_0(k \mathbf{x}_0) - J_0(k \mathbf{x}_0) H_1(k \mathbf{x}_0)],$$

wobei $k = [k_1^2 + k_2^2]^{\frac{1}{2}}$ und J_0, J_1, H_0, H_1 BESSEL'sche bzw. STRUVE'sche Funktionen sind. Diese Funktion nimmt auch negative Werte an.

⁷⁾ Vgl. A. ERDÉLYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER & F. G. TRICOMI, Tables of Integral Transforms Vol. II, 10 (8.2-32) (1945).

das zugehörige «power spectrum»

$$\begin{aligned} \langle G'_N(\vec{k}) \rangle &= [(2\pi)^4 / (4 \varrho s l)^2] [R_0 / 2\pi K_0] [K_0^2 - k^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot (1/\pi^2) [\sin^2 k_1 \varrho s / k_1^2] (1/\pi^2) [\sin^2 k_2 l / k_2^2] \\ &\quad \text{für } k^2 < K_0^2 = (2\pi/2 \mathbf{x}_0)^2 \\ &= 0 \text{ für } k^2 > K_0^2. \end{aligned} \quad (2-6)$$

2.2. Einfluss der Spaltfunktion auf die Spektraldichte der Photoplatte. Mit der speziellen Spektraldichte (2-6) haben wir zunächst den Ausdruck (vgl. I, (3.2-5))

$$\langle G'_N(k_1) \rangle = [(2\pi)^4 / A^2] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |V(k_1, k_2)|^2 \langle G_N(k_1, k_2) \rangle dk_2$$

für die Rechteckspalte (2-5) zu berechnen⁸⁾:

$$\begin{aligned} \langle G'_N(k_1) \rangle &= \frac{+ \sqrt{K_0^2 - k_1^2}}{[(2\pi)^4 / (4 \varrho s l)^2] [R_0 / 2\pi K_0] (1/\pi^2) [\sin^2 k_1 \varrho s / k_1^2] \cdot \int_{-\sqrt{K_0^2 - k_1^2}}^{+\sqrt{K_0^2 - k_1^2}} [K_0^2 - k_1^2 - k_2^2]^{-\frac{1}{2}} (1/\pi^2) [\sin^2 k_2 l / k_2^2] dk_2} \\ &= 0 \text{ für } k_1^2 > K_0^2. \end{aligned} \quad (2-7)$$

Die Auswertung des Integrals scheint analytisch nicht möglich; wir beschränken uns daher auf die folgende, einer asymptotischen Entwicklung ähnliche Approximation. Für genügend lange Spalten (Länge 2l) ersetzen wir die Funktion $[\sin^2 k_2 l / k_2^2]$ durch die Funktion D (k_2),

$$\begin{aligned} D(k_2) &= l^2 [1 - |k_2| / (\pi/l)] \quad \text{für } |k_2| < \pi/l \\ &= 0 \quad \text{für } |k_2| > \pi/l. \end{aligned} \quad (2-8)$$

In dieser Approximation ist das Integral elementar analytisch auswertbar, wobei drei Fallunterscheidungen berücksichtigt werden müssen. Für die ersten beiden Fälle hat man das Integral

$$2 \int_0^{\text{Min}(\pi/l, \sqrt{K_0^2 - k_1^2})} l^2 [1 - |k_2| / (\pi/l)] [K_0^2 - k_1^2 - k_2^2]^{-\frac{1}{2}} dk_2$$

zu bestimmen und erhält:

$$\alpha) k_1^2 \leq K_0^2 - (\pi/l)^2: \quad (2-9)$$

$$\langle G'_N(k_1) \rangle = [R_0 / \pi K_0] \varrho^{-2} s^{-2} [\sin^2 k_1 \varrho s / k_1^2] \cdot \{ \arcsin [(\pi/l) (K_0^2 - k_1^2)^{-\frac{1}{2}}] + (\pi/l)^{-1} [K_0^2 - k_1^2 - (\pi/l)^2]^{\frac{1}{2}} - [K_0^2 - k_1^2]^{\frac{1}{2}} \}$$

$$\beta) K_0^2 - (\pi/l)^2 < k_1^2 < K_0^2: \quad (2-9')$$

$$\langle G'_N(k_1) \rangle = [R_0 / \pi K_0] \varrho^{-2} s^{-2} [\sin^2 k_1 \varrho s / k_1^2] \cdot \{ \pi/2 - (\pi/l)^{-1} [K_0^2 - k_1^2]^{\frac{1}{2}} \}.$$

Der dritte Fall liegt vor bei $k_1^2 > K_0^2$:

$$\langle G'_N(k_1) \rangle = 0 \quad (2-9'')$$

2.21.1. Sehr hohe Spalte. Ist die Höhe 2l der Spalte gross verglichen mit der Korrelationsdistanz \mathbf{x}_0 ,

$$(2\pi/2l) \ll (2\pi/2 \mathbf{x}_0) = K_0,$$

so kann die Funktion $\langle G'_N(k_1) \rangle$ aus (2-6) direkt, unter Benutzung von

$$\delta(k_2) = \lim_{l \rightarrow \infty} (\pi l)^{-1} [\sin^2 k_2 l / k_2^2]$$

⁸⁾ $V(\vec{k}) = \mathfrak{F}\{U(\vec{y})\}$, vgl. (I, 3.1-2);

$|V(\vec{k})|^2 = \pi^{-2} [(\sin^2 k_1 \varrho s / k_1^2)] \pi^{-2} [(\sin^2 k_2 l / k_2^2)].$

oder aber aus (2-9) mittels einer Potenzreihenentwicklung um den Mittelpunkt $(\pi/l) = 0$ entwickelt werden. In beiden Fällen erhält man asymptotisch

$$\langle G'_N(k_1) \rangle \sim (1/2) R_0 (\pi/K_0 l) \pi^{-1} [(\sin^2 k_1 \varrho s) / (k_1 \varrho s)^2] [K_0^2 - k_1^2]^{-1/2} \quad (2-10)$$

für $k_1^2 < K_0^2 - (\pi/l)^2$

2.21.2. *Sehr lange und sehr breite Spalte.* Macht man $\varrho s \gg x_0$ und $l \gg x_0$, so wird das erste Glied der asymptotischen Entwicklung $\varrho s \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$

$$\langle G'_N(k_1, k_2) \rangle = [(2 \pi)^2 / 4 \varrho s l] (R_0 / 2 \pi K_0) [K_0^2 - k^2]^{-1/2} \delta(k_1) \delta(k_2). \quad (2-11)$$

Hier erhält man für die Varianz des Prozesses $T'_N(x) - \langle T_N \rangle$ asymptotisch

$$\sigma'^2_N = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle G'_N(k_1, k_2) \rangle dk_1 dk_2 \sim (2 \pi R_0 / K_0^2) (4 \varrho s l)^{-1} \sim (2 \pi / K_0^2) (\sigma^2_N / A) \quad (2-12)$$

Diese Formel bedeutet, dass die Varianz des mit einer rechteckigen Photometerspalte gemessenen Prozesses $T'_N(x) - \langle T_N \rangle$ asymptotisch umgekehrt proportional zur Fläche $A = 4 \varrho s l$ der Photometerspalte ist. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass dieser Zusammenhang asymptotisch richtig ist für fast alle Spaltformen, deren Mass A oberhalb einer gewissen Schranke liegt. Zuerst wurde dieses Gesetz von A. SELWYN⁹⁾ gefunden.

2.3. *Einfluss der Registrierung auf Spektraldichte und Varianz.* – 2.31. *Spektraldichte des registrierten Prozesses.* Die Spektraldichte des mit Plattengeschwindigkeit v_1 , Zeitkonstante τ und Schreibergeschwindigkeit v_2 registrierten Prozesses ${}_2T'_N(x') - \langle T'_N \rangle$ nimmt wegen (I, 3.31-2)

$$\langle {}_2G'_N(k') \rangle = (v_2/v_1) \langle G'_N(k' v_2/v_1) \rangle [1 + (k' \tau v_2)^2]^{-1}$$

für die drei Fälle 2.2. $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ des langen Spalts die Formen an:

$$\alpha) 0 < k'^2 < [K_0^2 - (\pi/l)^2] (v_1^2/v_2^2), \pi/K_0 l \ll 1: \quad (2-13)$$

$$\langle {}_2G'_N(k') \rangle \sim (R_0/2) (\pi/K_0 l) (v_2/v_1) \pi^{-1} [\sin^2(k' \varrho s v_2/v_1)] \cdot [k' \varrho s v_2/v_1]^{-2} [K_0^2 - (k' v_2/v_1)^2]^{-1/2} [1 + (k' \tau v_2)^2]^{-1}$$

$$\beta) [K_0^2 - (\pi/l)^2] (v_1/v_2)^2 < k'^2 < K_0^2 v_1^2/v_2^2: \quad (2-13')$$

$$\langle {}_2G'_N(k') \rangle \sim (R_0/K_0) (v_2/v_1) \pi^{-1} [\sin^2(k' \varrho s v_2/v_1)] [k' \varrho s v_2/v_1]^{-2} [\pi/2 - (\pi/l)^{-1} [K_0^2 - (k' v_2/v_1)^2]^{1/2} [1 + (k' \tau v_2)^2]^{-1}]$$

$$\gamma) k' \geq K_0 v_1/v_2: \quad \langle {}_2G'_N(k') \rangle = 0. \quad (2-13'')$$

2.32. *Varianz des registrierten Prozesses.* Ausgehend von der Spektraldichte $\langle {}_2G'_N(k') \rangle$ erhält man die Varianz σ'^2_{2N} des registrierten Prozesses

$$\sigma'^2_{2N}(k') = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle {}_2G'_N(k') \rangle dk', \quad (2-14)$$

wobei als Integranden in den jeweiligen Bereichen die entsprechenden Spektraldichten (2-13), (2-13'), (2-13'') einzusetzen sind.

Das letzte Integral scheint analytisch nicht auswertbar; wir approximieren daher $[\sin^2(k' \varrho s v_2/v_1)]/k'^2$ durch eine Dreiecksfunktion $D(k')$:

$$D(k') = (\varrho s v_2/v_1)^2 [1 - |k'| / (\pi/(\varrho s v_2/v_1))] \quad \text{für } k' \leq \pi/(\varrho s v_2/v_1) \quad (2-15)$$

$$= 0 \quad \text{für } k' \geq \pi/(\varrho s v_2/v_1).$$

Trifft man nun die Annahmen

$$\pi/\varrho s < K_0 \quad \text{und} \quad \pi/l \ll K_0 \quad (2-16)$$

⁹⁾ Vgl. 5), 4).

so folgt:

die Integrationsgrenze in (2-14) wird bestimmt durch die Nullstelle der Dreiecksfunktion, $k' = \pi/(\varrho s v_2/v_1)$;

der Bereich β) wird asymptotisch leer, vgl. (2-16).

Somit ergibt sich für die Varianz (2-14) unter Benützung von (2-13) und (2-16)

$${}_2\sigma_N^2(k') = (v_2/v_1) (R_0/\pi) (\pi/K_0 l) \int_0^{\pi/(\varrho s v_2/v_1)} [1 - k'/(\pi/(\varrho s v_2/v_1))] \cdot \\ \cdot [K_0^2 - (k' v_2/v_1)^2]^{-\frac{1}{2}} [1 + (k' \tau v_2)^{-1}]^{-1} dk',$$

was sich elementar auswerten lässt zu:

$${}_2\sigma_N^2(k') = (R_0/K_0 l) \left\{ \mu (1 + \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \arctg [\mu^{-1} (1 + \mu^2)^{\frac{1}{2}} (\pi/K_0 \varrho s) \cdot [1 - (\pi/K_0 \varrho s)^2]^{-\frac{1}{2}}] + \right. \\ \left. + (\pi/K_0 \varrho s)^{-1} \mu^2 (1 + \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot [\text{ArTg}(1 - (\pi/K_0 \varrho s)^2)^{\frac{1}{2}} (1 + \mu^2)^{-\frac{1}{2}} - \text{ArTg}(1 + \mu^2)^{-\frac{1}{2}}] \right\} \quad (2-17)$$

$$\text{mit } \mu = (K_0 \tau v_1)^{-1}$$

$$\text{wobei } (\pi/K_0 \varrho s)^2 + (\pi/K_0 l)^2 < 1, (\pi/K_0 l) \ll 1, (\pi/K_0 \varrho s) < 1$$

$$\text{oder } (\mathbf{x}_0/\varrho s)^2 + (\mathbf{x}_0/l)^2 < 1, (\mathbf{x}_0/l) \ll 1, (\mathbf{x}_0/\varrho s) < 1.$$

Für $(\pi/K_0 \varrho s) \ll 1$ kann man diese Formel entwickeln um den Mittelpunkt $(\pi/K_0 \varrho s) = 0$ und erhält

$${}_2\sigma_N^2 \approx (R_0/\pi) (\pi/K_0 l) (\pi/K_0 \varrho s) [1 - (1/2) \mu^2 (1 + \mu^2)^{-1} - (1/2) \mu^2 (1 + \mu^2)^{-2}]. \quad (2-18)$$

Im Grenzfall $\mu = (K_0 \tau v_1)^{-1} \rightarrow \infty$ wird hieraus

$${}_2\sigma_N^2 \sim (R_0/2 \pi) (\pi/K_0 l) (\pi/K_0 \varrho s). \quad (2-19)$$

Diese Formel ist wie zu erwarten identisch mit (2-12) für die asymptotische Varianz des Prozesses $T'_N(x_1) - \langle T'_N \rangle$ auf der photographischen Platte, da für $\tau \rightarrow 0$ oder $v_1 \rightarrow 0$ natürlich dieser Prozess exakt, d. h. ohne Verzerrung durch das Filterglied, registriert wird (SELWYN'sche Relation).

Bei expliziter Benützung der Korrelationsdistanz \mathbf{x}_0 nehmen (2-17) und (2-19) die einfache Gestalt an

$${}_2\sigma_N^2 \sim (R_0/\pi) (\mathbf{x}_0/l) \left\{ \mu (1 + \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \arctg [\mu^{-1} (1 + \mu^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{x}_0/\varrho s) \cdot [1 - (\mathbf{x}_0/\varrho s)^2]^{-\frac{1}{2}}] \right. \\ \left. + (\varrho s/\mathbf{x}_0) \mu^2 (1 + \mu^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot [\text{ArTg}[1 - (\mathbf{x}_0/\varrho s)^2]^{\frac{1}{2}} (1 + \mu^2)^{-\frac{1}{2}} - \text{ArTg}(1 + \mu^2)^{-\frac{1}{2}}] \right\} \quad (2-17')$$

$$\text{wenn } \mathbf{x}_0/l \ll 1, (\mathbf{x}_0/\varrho s)^2 + (\mathbf{x}_0/l)^2 < 1,$$

beziehungsweise

$${}_2\sigma_N^2 \sim (R_0/2 \pi) (\mathbf{x}_0/l) (\mathbf{x}_0/\varrho s) \quad (2-19')$$

wenn $\mu = \mathbf{x}_0/\pi \tau v_1 \gg 1$ zusätzlich erfüllt ist.

3. Diskussion der Gleichungen (2-17) und (2-17'). - 3.1. *Zu den Bedingungen von (2-17) und (2-17').* Nach CL. A. JONES¹⁰) beträgt bei der Emulsion Kodak Super XX der mittlere Kornradius ca. $0,5-1 \cdot 10^{-3}$ mm, woraus zu schliessen ist, dass die Korrelationsdistanz \mathbf{x}_0 die Grössenordnung 10^{-3} mm besitzt, bzw. $K_0 \approx \pi \cdot 10^3 \text{ mm}^{-1}$.

Bei Photometern¹¹⁾ für die Registrierung von Spektrallinien misst die Spalthöhe ca. $0,5-1$ mm, d. h. $(\pi/K_0 l) = \mathbf{x}_0/l$ wird von der Grössenordnung $10^{-3} \ll 1$; für die

¹⁰⁾ CL. A. JONES, J. opt. Soc. Amer. **45**, 807 (1955).

¹¹⁾ Wir verwendeten ein ZEISS-Schnellphotometer für den optischen Teil.

Registrierung der RAMAN-Linien von Flüssigkeitsspektren wählt man in der Regel $\varrho s \geq 10^{-2}$ mm, somit $(\pi/K_0 \varrho s) \approx 10^{-1} < 1$. Demnach wäre

$$(\mathbf{x}_0/l)^2 + (\mathbf{x}_0/\varrho s)^2 \approx 10^{-1} < 1,$$

so dass oft die Voraussetzungen für Gleichungen (2-17) und (2-17') erfüllt sein dürften.

3.2. Die Grösse $(\sigma'_N{}^2/R_0)$ repräsentiert das Verhältnis der mit Photometerspalte $4 \varrho s l$, Plattengeschwindigkeit v_1 , Zeitkonstante τ und Registriergeschwindigkeit v_2 aufgezeichnete Varianz des Prozesses ${}_2T'_N(x') - \langle T'_N \rangle$ zur Varianz desselben Prozesses bei Messung mit infinitesimaler Photometerspalte, verschwindender Zeitkonstante oder Plattengeschwindigkeit. Sie erweist sich im Rahmen der Voraussetzungen als Funktion der drei Variablen

- $y = \mathbf{x}_0/l$ Verhältnis von Korrelationsdistanz zu halber Spaltlänge;
- $x = \mathbf{x}_0/\varrho s$ Verhältnis von Korrelationsdistanz zu halber Spaltbreite;
- $\mu = \mathbf{x}_0/\pi\tau v_1$ Verhältnis von Korrelationsdistanz zu der Strecke, die die Platte in der Zeit $\pi\tau$ zurücklegt.

Da alle Formeln nur asymptotisch für $\mathbf{x}_0/l \ll 1$ gelten, so erscheint die y-Abhängigkeit als einfache Proportionalität. Es liegt daher nahe, die Grösse $[\sigma'_N/\sigma_N][y]^{-\frac{1}{2}}$ als Funktion von x und μ zu betrachten.

3.3. Numerische Auswertung. In Fig. 1 und 2 ist diese dimensionslose Grösse als Funktion von μ mit Parameter x bzw. als Funktion von x mit Parameter μ dargestellt.

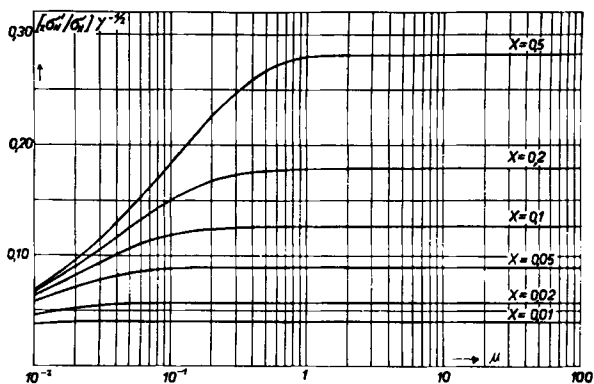


Fig. 1

$[\sigma'_N/\sigma_N][y]^{-\frac{1}{2}}$ dargestellt als Funktion von μ mit x als Parameter

Aus Fig. 1 ersieht man, dass:

- α) $[\sigma'_N/\sigma_N][y]^{-\frac{1}{2}}$ konstant wird für $\mu \approx 5x$,
- β) asymptotisch die in folgender Tab. 1 gemäss (2-19') angegebenen Werte annimmt:

x	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
$[\sigma'_N/\sigma_N][y]^{-\frac{1}{2}}$	0,282	0,178	0,126	0,0892	0,0564	0,0399

Aus Fig. 2 geht hervor, dass i. allg. schon ein $\mu \approx 0,5$ entweder unendlicher Bandbreite oder verschwindend kleiner Plattengeschwindigkeit gleichkommt. Bei einer Korrelationsdistanz $x_0 \approx 10^{-3}$ mm und einer Zeitkonstante von 1 s entspricht dem $\mu \approx 0,5$ eine Plattengeschwindigkeit von $v_1 \approx 10^{-3}$ mm/s.

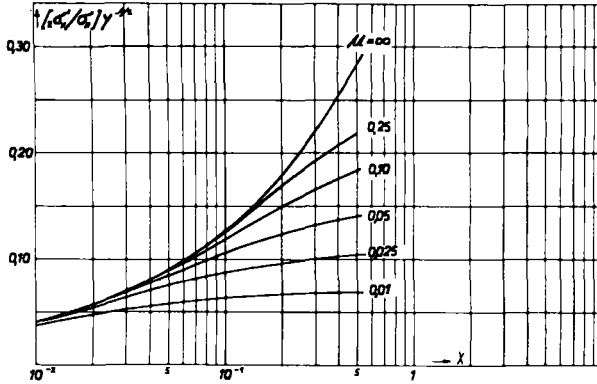


Fig. 2

$[\frac{2\sigma'_N}{\sigma_N}] y^{-\frac{1}{2}}$ dargestellt als Funktion von x mit μ als Parameter

Für alle $10^{-2} \leq \mu < \infty$ wird das asymptotische Gebiet bei $x \leq 1-2 \cdot 10^2$ erreicht. Dies rechtfertigt die Annahme, dass man mit Spaltlängen von 1–2 mm ($y \approx 10^{-3}$) meist bereits im asymptotischen Gebiet (der y -Abhängigkeit) arbeitet.

Wir danken dem Schweizerischen Nationalfonds (Projekt Nr. 1284) für die Unterstützung dieser Arbeit.

SUMMARY

The autocorrelation function of photographic granularity has been assumed to be described by an isotropic function $R_N(\mathbf{x}) = R_0(\sin(\pi \mathbf{x}/\mathbf{x}_0))/(\pi \mathbf{x}/\mathbf{x}_0)$, cf. (2–3). Formulas for the distortion of the corresponding power spectrum due to the effect of slit function (rectangular slit $2 \cdot 1 \cdot 2 \rho_s$) and of recording by a simple RC network (transfer function $(1 + i\omega \tau)^{-1}$, time constant τ , scanning speed v_1 , recording speed v_2) have been derived. The results are expressed as the ratio defined by the variance of noise after passing the photometer divided by the variance without distortion by the photometer, $\frac{2\sigma'_N}{\sigma_N}$. The discussion of numerical application shows that there exists a certain region – slit variable $x < 0,5$, recording parameter $\mu \geq 0,5-1,0$ –, where this ratio cannot be influenced by increasing μ .

Organisch-chemisches Laboratorium
der Eidg. Technischen Hochschule, Zürich